
刘 振 冬

国庆数学作业一

区间(a,b)是关于x的一元二次不等式$mx^2-x+1<0$的解集，则$2a+b$的最小值为（A）

$\to m>0$

A. $3+2\sqrt{2}$　　B. $2+2\sqrt{2}$　　C. 6　　D. $3-2\sqrt{2}$

由韦达定理 $\begin{cases} a+b=\frac{1}{m} \\ ab=\frac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow a+b=ab$ 且 $a>0, b>0$

$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$　　两式相等 → 相除 →「乘1法」

$2a+b=(2a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$

$=3+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 3+2\sqrt{2}$

21．定义$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为$n$个实数$a_1$，$a_2$，…，$a_n$中的最小数，$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为$n$个实数$a_1$，$a_2$，…，$a_n$中的最大数．

(3)设a，b都是正实数，求$\max\left\{a+\frac{1}{b},\frac{2}{a}+b\right\}$的最小值．

设 $M=\max\left\{a+\frac{1}{b},\frac{2}{a}+b\right\}$

$\Rightarrow M\geqslant a+\frac{1}{b}$，$M\geqslant\frac{2}{a}+b$　　消基本不等式，如何把a和b放在一起？

$\Rightarrow 2M\geqslant a+\frac{2}{a}+b+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{2}+2.$　（当且仅当 $a=\frac{2}{a}, b=\frac{1}{b}$ 时取等）

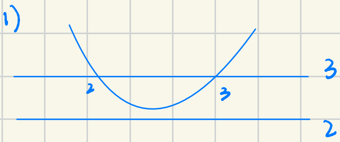
$\Rightarrow M\geqslant\sqrt{2}+1$

22．已知不等式$2\leq ax^2+bx+c\leq 3$的解集为$\{x|2\leq x\leq 3\}$　韦达定理换元

(1)若$a>0$，且不等式$ax^2+(b-3)x-c\leq 0$有且仅有10个整数解，求a的取值范围；

(2)若$a\neq 0$，解关于x的不等式：$ax^2+(b-1)x+5<0$．

(1)



$ax^2+bx+c=3$ 的根为 $x=2$、$x=3$.

韦达定理 $\begin{cases} 2+3=-\frac{b}{a} \\ 2\times 3=\frac{c-3}{a} \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} b=-5a \\ c=6a+3 \end{cases}$

$ax^2+bx+c=ax^2-5ax+6a+3\geqslant 2$ 解集为R.

$\Rightarrow\Delta\leqslant 0.\Rightarrow a\in(0,4]$

$ax^2+(b-3)x-c=(x+1)(ax-6a-3)\leqslant 0.$

$\Rightarrow x\in[-1,6+\frac{3}{a}]$

$\hookrightarrow[8,9)\Rightarrow a\in(1,\frac{3}{2}]$

国庆数学作业二

8 已知实数x,y满足$x^2+4y^2-xy=3$，则（　　）

A. $xy\geq 1$ ×　　B. $x+2y\leq 2$ ×　　C. $x+2y\geq -\sqrt{2}$ ×　　D. $x^2+4y^2\leq 4$ √

运用不等式，不局限于使用基本不等式.

A: $x^2+4y^2\geqslant 4xy$

$\Rightarrow 4xy-xy=3xy\leqslant 3.$

$\Rightarrow xy\leqslant 1$

B,C: $(x+2y)^2=x^2+4y^2+4xy$

$=3+5xy\leqslant 8.$

$\Downarrow$

$-2\sqrt{2}\leqslant x+2y\leqslant 2\sqrt{2}$

D: $x^2+4y^2=3+xy\leqslant 4.$

12.下列说法正确的是（ ABD）

A．若 $x>1$，则 $y=3x+\dfrac{1}{x-1}$ 的最小值为 $2\sqrt{3}+3$　$y=3(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+3\geq 3+2\sqrt{3}$ ✓

B．已知 $x>-1$，$y>0$，且 $x+2y=1$，则 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y}$ 的最小值为 $\dfrac{9}{2}$ ✓

$\Rightarrow x+1+2y=2$.

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y}\right)(x+1+2y)$　「乘1法」的变形

$\geq\dfrac{9}{2}$

C．已知 $m\geq0$，$n\geq0$，且 $m+n=1$，则 $\dfrac{m^2}{m+2}+\dfrac{n^2}{n+1}$ 的最小值为 $\dfrac{4}{15}$　X.

$m^2\Rightarrow(m+2-2)^2=(m+2)^2-4(m+2)+4$　换元.

$n^2\Rightarrow(n+1-1)^2=(n+1)^2-2(n+1)+1$

$\Rightarrow$ 原式 $=m+2-4+\dfrac{4}{m+2}+n+1-2+\dfrac{1}{n+1}$

$\geq\dfrac{1}{4}$.

D．若 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 则 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3xy+4yz}$ 的最小值为 $\dfrac{2}{5}$ ✓

$y^2\Rightarrow\dfrac{9}{25}y^2+\dfrac{16}{25}y^2$

$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3xy+4yz}=\dfrac{x^2+\frac{9}{25}y^2+\frac{16}{25}y^2+z^2}{3xy+4yz}\geq\dfrac{2\times\frac{3}{5}xy+2\times\frac{4}{5}xy}{3xy+4yz}=\dfrac{2}{5}$

14.已知函数 $f(1-x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}(x\neq0)$，则 $f(x)=$ $\underline{\dfrac{1}{(x-1)^2}-1}$ $(x\neq1)$.

令 $t=1-x\Rightarrow x=1-t$

$f(t)=\dfrac{1-(1-t)^2}{(1-t)^2}=\dfrac{1}{(1-t)^2}-1\quad(t\neq1)$　换元法

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-1\quad(x\neq1)$

13.若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,3]$，则函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $\underline{(1,4]}$.

$x\in[-2,3]$　　$x\in[-1,4]$　　$x\in(1,+\infty)$

$(x+1)\in[-1,4]\Rightarrow f(x)$ 的定义域为 $[-1,4]$

21．(12 分)解关于 x 的不等式：$\dfrac{a(x-2)}{2x-1}\leq1(a\in R)$

解

$\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{a(x-2)}{2x-1}\leq1\Rightarrow\dfrac{a(x-2)-2x+1}{2x-1}\leq0\Rightarrow\dfrac{(a-2)x-2a+1}{2x-1}\leq0$

$\Rightarrow[(a-2)x-2a+1](2x-1)\leq0$ 且 $2x-1\neq0$.

0，2.　分子分母相乘　　$(a-2)x-2a+1=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{2a-1}{a-2}$

① 当 $a=0$ 时 $\Rightarrow\dfrac{0}{2x-1}\leq1\Rightarrow x\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow x\,(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

② 当 $a=2$ 时 $\Rightarrow\dfrac{2x-4}{2x-1}\leq1\Rightarrow x\in(\frac{1}{2},+\infty)$

$\dfrac{2a-1}{a-2}=\dfrac{1}{2}$

③ 当 $a<0$ 时 $\Rightarrow x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup[\frac{2a-1}{a-2},+\infty)$

④ 当 $0<a<2$ 时 $\Rightarrow x\in[\frac{1}{2},\frac{2a-1}{a-2}]$

⑤ 当 $a>2$ 时，$\Rightarrow x\in(\frac{1}{2},\frac{2a-1}{a-2}]$

不等式

8.（多选题）已知关于 x 的不等式 $a\leqslant\frac{3}{4}x^2-3x+4\leqslant b$，则下列结论错误的是（ AB ）

A. 当 $a<b<1$ 时，不等式 $a\leqslant\frac{3}{4}x^2-3x+4\leqslant b$ 的解集非空 ×

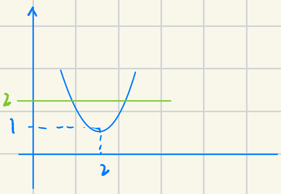
B. 当 $a=2$ 时，不等式 $a\leqslant\frac{3}{4}x^2-3x+4\leqslant b$ 的解集可以为 $\{x|c\leqslant x\leqslant d\}$ 的形式 × $\{x\mid x\leqslant c, x\geqslant d\}$

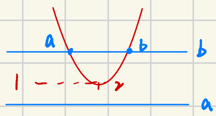
C. 不等式 $a\leqslant\frac{3}{4}x^2-3x+4\leqslant b$ 的解集恰好为 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 时，$b=\frac{4}{3}$

$a=\frac{8}{3}$ 不满足. $a\leqslant 1$. $x=a$，$x=b$ 时，y 值为 b. $b=4$ 或 $b=\frac{4}{3}$

D. 不等式 $a\leqslant\frac{3}{4}x^2-3x+4\leqslant b$ 的解集恰好为 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 时，$b-a=4$

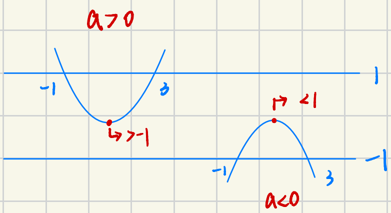
$b=4$ 时. $a=0$. √.





$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{4}a^2-3a+4=b\\ \frac{3}{4}b^2-3b+4=b\end{cases}\Rightarrow b=\frac{4}{3}\Rightarrow a=\frac{8}{3}\ ×$$
$$b=4\Rightarrow a=0\ √.$$

9. 若不等式 $-1<ax^2+bx+c<1$ 的解集为 $(-1,3)$，求实数 a 的取值范围.



分别代入 -1，1，3

若 $a>0$，

$$\begin{cases}a-b+c=1\\ 9a+3b+c=1\\ a-b+c>-1\end{cases}\Rightarrow 0<a<\frac{1}{2}$$

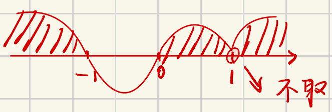
若 $a<0$

$$\begin{cases}a-b+c=-1\\ 9a+3b+c=-1\\ a-b+c<1\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}<a<0$$

综上，$a\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

函数

$(x-1)^2x(x+1)>0$ 的穿针引线



「同族函数」

1. 若一系列函数的解析式相同，值域相同，但定义域不同，则称这些函数为“同族函数”. 则函数解析式为 $y=x^2+1$，值域为 $\{1,3\}$ 的“同族函数”共有（ B ）

值域是孤立的点

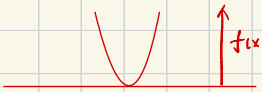
$x^2+1=1\Rightarrow x=0.$

$x^2+1=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$\{0,\sqrt{2}\}$，$\{0,-\sqrt{2}\}$，$\{0,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$

同类 7. 若一系列函数的解析式相同，值域相同，但定义域不同，则称这些函数为“同族函数”. 那么函数解析式为 $y=2x^2-3$，值域为 $\{-1,5\}$ 的“同族函数”共有（ C ）

14. 已知函数 $f(x)=x^2+bx+2, x\in\mathbf{R}$，若函数 $g(x)=f[f(x)]$ 与 $f(x)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时有相同的值域，则实数 b 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$.



g(x)必须要能取到最小值

$x=-\frac{b}{2}$ 时，$f(x)_{min}=2-\frac{b^2}{4}$

$2-\frac{b^2}{4}<-\frac{b}{2} \Rightarrow b\geq 4$ 或 $b\leq -2$

14. 已知函数 $f(x)=(x-2)|x-a|+1$. $(-1,3)$

(1) 当 $a=4$ 时，写出 $f(x)$ 的单调区间； $\Rightarrow$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $(3,4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 若存在 $x\in[3,5]$，使得 $f(x)>5$，求实数 a 的取值范围.

$f(x)_{max}>5$.

$\Rightarrow (x-2)|x-a|>4$

$\Rightarrow |x-a|>\frac{4}{x-2}$ $(x\in[3,5])$

$\Rightarrow a<\underbrace{x-\frac{4}{x-2}}_{max}$ 或 $a>\underbrace{x+\frac{4}{x-2}}_{min}$ 在 $x\in[3,5]$ 上有解

在 $[3,5]$ 上递增 ; 在 $(3,4)$ 上递减，在 $(4,5)$ 上递增 $\Rightarrow 6$.

$a<\frac{11}{3}$

$\Rightarrow a\in(-\infty,\frac{11}{3})\cup(6,+\infty)$

14. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(mn)=f(m)+f(n)$ $(m>0,n>0)$，且当 $x>1$ 时，$f(x)>0$.

(3) 比较 $f\left(\frac{m+n}{2}\right)$ 与 $\frac{f(m)+f(n)}{2}$ 的大小.

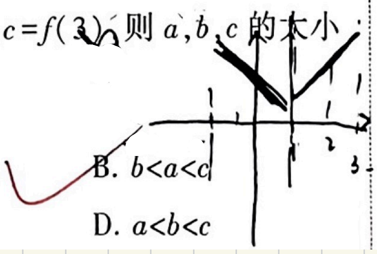
函数的奇偶性应用

6. 已知函数 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $1<x_1<x_2$ 时，$[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)>0$ 恒成立，设 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$b=f(2)$，$c=f(3)$，则 a,b,c 的大小关系为（ B ）

$=f(-x+1)$ 递增

A. $c<b<a$ B. $b<a<c$

C. $b<c<a$ D. $a<b<c$



$f(x+1)$ 为偶函数

$f(1+x)=f(1-x) \Rightarrow f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

若 $f(a+x)=f(a-x) \Rightarrow f(x)$ 关于 a 对称

函数平移

$f(-\frac{1}{2})=f(\frac{5}{2})$

$2<\frac{5}{2}<3 \Rightarrow f(2)<f(-\frac{1}{2})<f(3)$

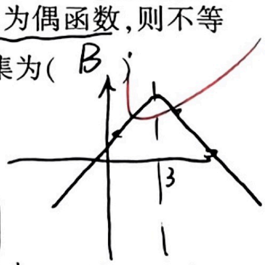
11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上单调递增，且 $f(x+3)$ 为偶函数，则不等式 $f(x+1)>f(2x)$ 的解集为（ B ）

A. $\left(1,\frac{5}{3}\right)$

B. $(-\infty,1)\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$

C. $(-\infty,1)$

D. $(1,+\infty)$



$|x+1-3|<|2x-3|$

$f(x+3)$ 为偶函数

$\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=3$ 轴对称

10. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的,且满足以下条件:① $\forall x\in\mathbf{R}$, 偶函数 $f(-x)=f(x)$;② $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,当 $x_1\neq x_2$ 时,$\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}>0$. 递增 记 $a=f(1)$, $b=\frac{f(-3)}{3}$ $=f(3)$, $c=\frac{f(5)}{5}$,则(B)

A. $c<a<b$ B. $a<b<c$

C. $c<b<a$ D. $b<c<a$

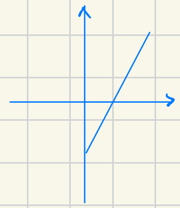
特别单调定义等价式

$$\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}>0$$

同时除以 $x_1\cdot x_2$ $(x_1x_2>0)$

$$\Rightarrow \frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}>0$$

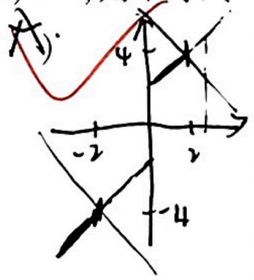
$\Rightarrow y=\frac{f(x)}{x}$ 递增



$a=\frac{f(1)}{1}$ $b=\frac{f(-3)}{3}=\frac{f(3)}{3}$ $c=\frac{f(5)}{5}$

$\Rightarrow a<b<c$

13. 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 对任意 $0<x_2<x_1$,都有 $\boxed{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}<2$,且函数 $y=f(x)$ 的图象$\boxed{\text{关于原点对称}}$.若 $f(2)=4$,则不等式 $f(x)-2x>0$ 的解集是(A)



A. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C. $(-2,0)\cup(0,2)$

D. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<2$$

$\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)<2(x_1-x_2)$

$\Rightarrow f(x_1)-2x_1<f(x_2)-2x_2$

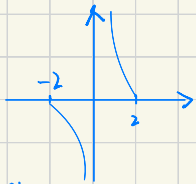
令 $g(x)=f(x)-2x$

$\because x_1>x_2$, $g(x_1)<g(x_2)$

$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减

$g(-x)=f(-x)+2x=-f(x)+2x=-g(x)$ 奇函数

$\Rightarrow g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减



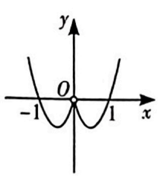
$g(2)=f(2)-4=0=g(-2)$

$f(x)-2x>0\Rightarrow g(x)>g(2)\Rightarrow 0<x<2$

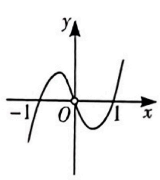
$g(x)>g(-2)\Rightarrow x<-2$

3. 函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|}$ 的图象大致为(D)

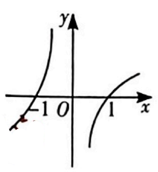
特别函数图像



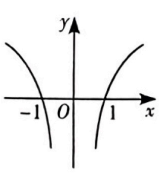
A



B



C

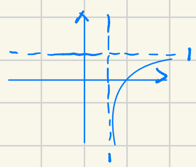


D

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ 偶函数,排除B, C

$x>0$时, $\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}$

对勾函数



在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

7. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x)$，若函数 $g(x)=f(x)-x$ 在区间 $[1,2]$ 上的值域为 $[-1,3]$，则 $g(x)$ 在区间 $[-2\,021,2\,021]$ 上的值域为__________.

$f(x+1)=f(x) \Rightarrow g(x+1)=f(x+1)-(x+1)=f(x)-x-1=g(x)-1$

$\forall k\in Z,\ x\in[k+1,k+2] \Rightarrow x-k\in[1,2]$

$g(x)=g(x-1)-1=g(x-k)-k$ 找 $g(x)$ 的规律

$g(x-k)\in[-1,3]$

$g(x)\in[-1-k,3-k]$

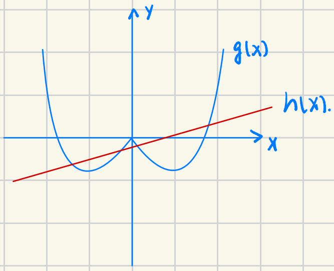
$$x\in[k+1,k+2]\to\begin{cases} x\in[-2022+1,-2022+2] \Rightarrow g(x)\in[2021,2025]. \\ x\in[-2021+1,-2021+2] \Rightarrow g(x)\in[2020,2024] \\ \cdots\cdots \\ x\in[2019+1,2019+2] \Rightarrow g(x)\in[-2020,-2016] \end{cases} \Rightarrow [-2020,2025]$$

8.（5 分）已知 $a>0$，$k\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-\sqrt{a}\,|x|, & x\leqslant s \\ kx+k-1, & x>s \end{cases}$，若对任意的实数 $s\in(-2,2)$，都有 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上至少存在两个零点，则（　　）

A．$a\geqslant4$，且 $k\geqslant1$　　B．$a\geqslant4$，且 $0<k\leqslant1$

C．$0<a<4$，且 $k\geqslant1$　　D．$0<a<4$，且 $0<k\leqslant1$

分段函数的零点



• COMPLETED •

【解答】解：由选项可得 $a>0$，$k>0$，

设 $g(x)=x^2-\sqrt{a}|x|$，$h(x)=kx+k-1$，分为两个函数.

由 $g(x)=0$，可得 $x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{a}$；

由 $h(x)=0$，可得 $x=\frac{1}{k}-1$，　　求可能的零点

当 $0\leqslant s<2$ 时，$f(x)$ 总有两个零点 0 和 $-\sqrt{a}$；

当 $-2<s<0$ 时，$f(x)$ 可能有两个零点 $-\sqrt{a}$ 和 $\frac{1}{k}-1$，

又因为 $f(x)$ 至少有两个零点，

所以 $-\sqrt{a}$，$\frac{1}{k}-1$ 均为零点，

所以 $\begin{cases} -\sqrt{a}\leqslant s \\ \frac{1}{k}-1>s \end{cases}$，可得 $\begin{cases} -\sqrt{a}\leqslant-2 \\ \frac{1}{k}-1\geqslant0 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} a\geqslant4 \\ 0<k\leqslant1 \end{cases}$.

故选：B.

对于在某个区间 $[a,+\infty)$ 上有意义的函数 $f(x)$，如果存在一次函数 $g(x)=kx+b$ 使得对于任意的 $x\in[a,+\infty)$，有 $|f(x)-g(x)|\leqslant1$ 恒成立，则称函数 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的弱渐近函数.

(1)判断 $g(x)=x$ 是否是函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的弱渐近函数，并说明理由.

(2)若函数 $g(x)=3x+1$ 是函数 $f(x)=3x+\frac{m}{x}$ 在区间 $[4,+\infty)$ 上的弱渐近函数，求实数 m 的取值范围；

(3)是否存在函数 $g(x)=kx$，使得 $g(x)$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的弱渐近函数？若存在，求出实数 k 的取值范围；若不存在，说明理由.

(2) $\left|\frac{m}{x}-1\right|\leq1$

$\Rightarrow -1\leq\frac{m}{x}-1\leq1$ 在 $[4,+\infty)$ 上恒成立.

$\Rightarrow 0\leq\frac{m}{x}\leq2.$　　$x>0.$

$\Rightarrow 0\leq m\leq2x.$

$\Rightarrow 0\leq m\leq8.$

(3) $\forall x\in[1,+\infty)$

$|f(x)-g(x)|=|kx-\sqrt{x}|\leq1.$

去绝对值

$|m|<n.$

$\Rightarrow -1\leq kx-\sqrt{x}\leq1$ 对于任意 $x\in[1,+\infty)$ 成立

$\Rightarrow -n<m<n.$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{-1+\sqrt{x}}{x}}_{max}\leq k\leq\underbrace{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}_{min.}$ 分离参数转化为变量式的最值

令 $h_1(x)=\frac{-1+\sqrt{x}}{x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

再令 $\frac{1}{\sqrt{x}}=t.$

$\Rightarrow h_1(t)=-t^2+t$　　同理 $h_2(t)=t^2+t\in(0,2]$

$h_1(t)\ max=\frac{1}{4}$　　不存在.

题目

对于函数$f(x)$，如果存在区间$[m,n]$，同时满足下列条件：①$f(x)$在$[m,n]$上是单调的；②当$f(x)$的定义域是$[m,n]$时，$f(x)$的值域是$[3m,3n]$，则称$[m,n]$是该函数的“倍值区间”.若函数$f(x)=\sqrt{x+1}+a$存在“倍值区间”，则a的取值范围是______.

解答

由函数$f(x)=\sqrt{x+1}+a$单调递增，且函数$f(x)$存在“倍值区间”，

存在$-1\leqslant m<n$，使得$\begin{cases}3m=\sqrt{m+1}+a\\3n=\sqrt{n+1}+a\end{cases}$，

设$\begin{cases}u=\sqrt{m+1}\geq0\\v=\sqrt{n+1}>0\end{cases}$，则$0\leqslant u<v$，且$\begin{cases}m=u^2-1\\n=v^2-1\end{cases}$，所以$\begin{cases}3u^2-u-3-a=0\\3v^2-v-3-a=0\end{cases}$，

因此二次函数$g(x)=3x^2-x-3-a$在$[0,+\infty)$上有两个零点u，v且$u<v$，

则$\begin{cases}g(0)=-3-a\geq0\\\frac{1}{2\times3}>0\\\Delta=1+12(3+a)>0\end{cases}$，解得$-\dfrac{37}{12}<a\leq-3$.

故答案为：$(-\dfrac{37}{12},\ -3]$.

12．已知$b>0$,若对任意的$x\in(0,+\infty)$,不等式$ax^3+3x^2-abx-3b\leq0$恒成立.则（　）

A．$a<0$　　B．$a^2b=3$

C．a^2+4b的最小值为12　　D．$a^2+ab+3a+b$的最小值为$6-6\sqrt{3}$

高次不等式 → 最值 ✗
穿针引线

$ax^3+3x^2-abx-3b=(ax-3)(x^2-b)\leq0.$

$\frac{3}{a}$　　$\pm\sqrt{b}$

19．已知ΔABC的三边长为a,b,c，其中$a=2$．求证：ΔABC为等边三角形的充要条件是$b^2+c^2-2(b+c)=bc-4$．

P: $b^2+c^2-2(b+c)=bc-4$　　q: ΔABC为等边三角形

充分性：$b^2+c^2-2(b+c)=bc-4$

把2、4代回a.
找 $a=b=c$

$b^2+c^2-a(b+c)=bc-a^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$

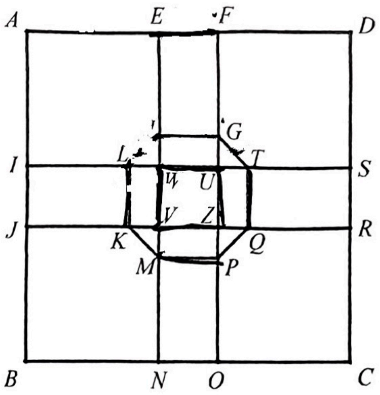
$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$

$\Rightarrow a=b=c=2.$ $\Rightarrow \Delta ABC$为等边三角形

$P\Rightarrow q$

必要性：ΔABC为等边三角形 $\Rightarrow a=b=c=2$，代入方程成立.

20．如图，现将正方形区域 $ABCD$ 规划为居民休闲广场，八边形 $HGTQPMKL$ 位于正方形 $ABCD$ 的正中心，计划将正方形 $WUZV$ 设计为湖景，造价为每平方米 20 百元；在四个相同的矩形 $EFUW$，$IJVW$，$VZON$，$UZRS$ 上修鹅卵石小道，造价为每平方米 2 百元；在四个相同的五边形 $AEHLI$ $DFGTS$，$PORCQ$，$BNMKJ$ 上种植草坪，造价为每平方米 2 百元；在四个相同的三角形 HLW，GTU，PQZ，KMV 上种植花卉，造价为每平方米 5 百元．已知阴影部分面积之和为 8000 平方米，其中 $GH=TQ=MP=KL=\sqrt{2}LH$，$LH=GT=PQ=KM$，$GH \parallel PM$，$TQ \parallel KL$，EF 的长度最多能达到 40 米．



（1）设总造价为 S（单位：百元），HG 长为 $2x$（单位：米），试用 x 表示 S；

（2）试问该居民休闲广场的最低造价为多少百元？

（参考数据：取 $\sqrt{43}=6.6$，结果保留整数）

21．已知函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=-x+\frac{a}{x}-2$．

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围．

奇函数的性质

$f(x_1)-f(x_2)>0$

参变分离 → $a>-x_1 x_2$

解答

（1）当 $x=0$ 时，由函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数得 $f(0)=0$；

当 $x>0$ 时，$-x<0$，则

$f(-x)=x-\frac{a}{x}-2$，

因为 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，

所以 $f(-x)=x-\frac{a}{x}-2=-f(x)$，

所以 $f(x)=-x+\frac{a}{x}+2$，

故 $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{a}{x}-2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -x+\frac{a}{x}+2, & x>0.\end{cases}$

(2)由函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，

设 $\forall x_1$，$x_2\in[2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，即 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

即

$f(x_1)-f(x_2)=-x_1+\frac{a}{x_1}-2$

$-(-x_2+\frac{a}{x_2}-2)=(x_2-x_1)$

$+(\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2})$

$=(x_2-x_1)\cdot(1+\frac{a}{x_1\cdot x_2})>0$.

则 $\forall x_1$，$x_2\in[2,+\infty)$，因为 $x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$，所以 $1+\frac{a}{x_1\cdot x_2}>0$，则

$a>-x_1\cdot x_2$，

又 $-x_1\cdot x_2<-4$，

所以 a 的取值范围是 $[-4,+\infty)$.

22．若在函数 $f(x)$ 的定义域内存在区间 $[a,b]$，使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，且函数值的取值范围是 $[ma,mb]$（m 是常数），则称函数 $f(x)$ 具有性质 M．

(1)当 $m=\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 否具有性质 M？若具有，求出 a，b；若不具有，说明理由；　$a=0$，$b=4$　单调性，建立方程组

(2)若定义在 $(0,2)$ 上的函数 $f(x)=\left|x+\frac{4}{x}-5\right|$ 具有性质 M，求 m 的取值范围．

化简

→得 a,b 方程

→方程根的存在

问题

换元

(2)因为

$f(x)=|x+\frac{4}{x}-5|$

$=\begin{cases}x+\frac{4}{x}-5, & 0<x<1,\\ 5-(x+\frac{4}{x}), & 1\le x<2.\end{cases}$

，

当 $[a,b]\subseteq(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore\begin{cases}f(a)=mb,\\ f(b)=ma,\end{cases}$，

即 $\begin{cases}a+\frac{4}{a}-5=ma\\ b+\frac{4}{b}-5=mb\end{cases}$，

消去 m，整理得 $(a-b)(a+b-5)=0$，

$\because a+b=5$ 与 $[a,b]\subseteq(0,1)$ 矛盾，

当 $[a,b]\subseteq[1,2)$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2)$ 单调递增，

$\therefore\begin{cases}f(a)=ma,\\ f(b)=mb,\end{cases}$，

即 $\begin{cases}a+\frac{4}{a}-5=ma\\ b+\frac{4}{b}-5=mb\end{cases}$，

$f(x)=mx$ 在 $[1,2)$ 上有两个不等实根，

即 $m=\frac{f(x)}{x}=-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x}-1$ 在 $[1,2)$ 上有两个不等实根，

令 $t=\frac{1}{x}\in(\frac{1}{2},1]$，则

$h(t)=-4t^2+5t-1$，

由 $h(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$h(\frac{5}{8})=\frac{9}{16}$，$h(1)=0$，

根据二次函数的性质可知，$\frac{1}{2}<m<\frac{9}{16}$，

综上，m 的取值范围是 $(\frac{1}{2},\frac{9}{16})$.

指数函数

5.（多选题）已知函数 $f(x)=a^x(a>1)$，$g(x)=f(x)-f(-x)$，若 $x_1\neq x_2$，则（ AC ）

$g(x)=f(x)-f(-x)=a^x-a^{-x}=a^x-(\frac{1}{a})^x$

为单调增函数

A. $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$ $\quad f(x_1)f(x_2)=a^{x_1}\times a^{x_2}=a^{x_1+x_2}=f(x_1+x_2)$

B. $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1x_2)$ ×

C. $x_1g(x_1)+x_2g(x_2)>x_1g(x_2)+x_2g(x_1)$ $\Rightarrow (x_1-x_2)[g(x_1)-g(x_2)]>0.$

若 $x_1>x_2$，$g(x_1)>g(x_2)$

若 $x_1<x_2$，$g(x_1)<g(x_2)$.

D. $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$ 举反例

1. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+2^x}$，则对任意实数 x，有（ C ）

$\hookrightarrow f(-x)=\frac{1}{1+2^{-x}}=\frac{2^x}{1+2^x}$

A. $f(-x)+f(x)=0$ B. $f(-x)-f(x)=0$

非奇非偶函数，排除 A,B.

C. $f(-x)+f(x)=1$ D. $f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

$f(-x)+f(x)=\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{1}{1+2^x}=1$

14. 设 $a=0.23^{0.32}$，$b=2^{0.01}$，$c=0.32^{0.23}$，则 a,b,c 的大小关系为____________.

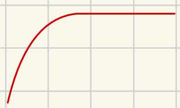
13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+1, & x\geqslant0,\\(a+2)e^{ax}, & x<0\end{cases}$ 为 **R** 上的单调函数（e 为 2.718…），则实数 a 的取值范围是 $[-1,0)$.

分类讨论

若 $f(x)$ 在 R 上单增 $\begin{cases}a>0\\0<a+2\leq1\end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing.$

若 $f(x)$ 在 R 上单减 $\begin{cases}a<0\\0<a+2\leq1\end{cases}\Rightarrow a\in[-1,0).$

可以不变



16. 已知函数 $y=f(x)$ 为偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+2ax+1$（a 为常数）.

（2）设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,5]$ 上的最大值为 $g(a)$，求 $g(a)$ 的表达式；

（3）对于（2）中的 $g(a)$，试求满足 $g(8m)=g\left(\frac{1}{m}\right)$ 的所有实数 m 的取值集合.

2.【答案】

当 $x\in[0,\ 5]$ 时，$f(x)=x^2+2ax+1$，对称轴 $x=-a$，

①当 $-a\geqslant\frac{5}{2}$，即 $a\leqslant-\frac{5}{2}$ 时，

$g(a)=f(0)=1$；

②当 $-a<\frac{5}{2}$，即 $a>-\frac{5}{2}$ 时，

$g(a)=f(5)=10a+26$；

综上所述，$g(a)=\begin{cases}1, & a\leqslant-\frac{5}{2}\\ 10a+26, & a>-\frac{5}{2}\end{cases}$。

3.【答案】

由上一问知 $g(a)=\begin{cases}1, & a\leqslant-\frac{5}{2}\\ 10a+26, & a>-\frac{5}{2}\end{cases}$，

当 $a\leqslant-\frac{5}{2}$ 时，$g(a)$ 为常函数；

当 $a>-\frac{5}{2}$ 时，$g(a)$ 为一次函数且为增函数；

因为 $g(8m)=g(\frac{1}{m})$，所以有 $\begin{cases}m>0\\ 8m=\frac{1}{m}\end{cases}$

或 $\begin{cases}8m\leqslant-\frac{5}{2}\\ \frac{1}{m}\leqslant-\frac{5}{2}\end{cases}$，

解得 $m=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $\begin{cases}m\leqslant-\frac{5}{16}\\ -\frac{2}{5}\leqslant m<0\end{cases}$，

即m的取值集合为

$\{m|m=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $-\frac{2}{5}\leqslant m\leqslant-\frac{5}{16}\}$。

另解①当 $8m<-\frac{5}{2}$，有 $m<-\frac{5}{16}$，所以

$\frac{1}{m}\in(-\frac{16}{5},\ 0)$，

则 $\begin{cases}-\frac{5}{2}\leqslant m<0\\ 1=26+10\cdot\frac{1}{m}\end{cases}$ 或

$\begin{cases}-\frac{16}{5}<m<-\frac{5}{2}\\ 1=1\end{cases}$，

解得 $m=-\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}<m<-\frac{5}{16}$，取并集

得 $-\frac{2}{5}\leqslant m<-\frac{5}{16}$；

②当 $8m\geqslant-\frac{5}{2}$，有 $m\geqslant-\frac{5}{16}$，所以

$\frac{1}{m}\in(-\infty,\ -\frac{16}{5}]\cup[0,\ +\infty)$，

则 $\begin{cases}\frac{1}{m}\leqslant-\frac{16}{5}\\ 1=26+10\cdot 8m\end{cases}$ 或

$\begin{cases}\frac{1}{m}>0\\ 26+10\cdot m=26+10\cdot\frac{1}{m}\end{cases}$；

解得 $m=-\frac{5}{16}$ 或 $m=\frac{\sqrt{2}}{4}$（舍负）；

综上所述，m的取值集合为

$\{m|m=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $-\frac{2}{5}\leqslant m\leqslant-\frac{5}{16}\}$。

8. 若正数 x,y 满足 $x^2-3y^2=2xy$，则 $\frac{x-y}{x+y}=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$，$\frac{x^2-xy+2y^2}{x^2+y^2}=$ $\underline{\ \frac{4}{5}\ }$.

齐次式

换元

$x^2-3y^2=2xy$

同时 ÷ y^2

$(\frac{x}{y})^2-3=2$

$\Rightarrow \frac{x}{y}=3$ 或 -1（正数，舍去）

$\frac{x-y}{x+y}=\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+1}=\frac{1}{2}$

$\frac{x^2-xy+2y^2}{x^2+y^2}=\frac{(\frac{x}{y})^2-\frac{x}{y}+2}{(\frac{x}{y})^2+1}=\frac{4}{5}$

ABD 11.已知 $a>0$，且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}, g(x)=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}$，则(　　)

A.曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 关于 x 轴对称 √. $-f(x)=\frac{1-a^x}{1+a^x}=g(x)$.

B.曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 关于 y 轴对称 √.

C.当 $a>1$ 时，函数 $y=f(x)g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

D.当 $0<a<1$ 时，函数 $y=f(x)g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

技巧：
并非一定是A.B中选一个，CD中选一个.

ABC 12.定义：若函数 $F(x)$ 在区间 $[a，b]$ 上的值域为 $[a，b]$，则称区间 $[a，b]$ 是函数 $F(x)$ 的“完美区间”，另外，定义区间 $[a，b]$ 的“复区间长度”为 $2(b-a)$，已知函数 $f(x)=|x^2-1|$，则(　　)

A. $[0，1]$ 是 $f(x)$ 的一个“完美区间” √. $[0,1]$ 时，$f(x)=1-x^2$ √.

B. $\left[0，\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ 是 $f(x)$ 的一个“完美区间” √. $[1,\frac{1+\sqrt5}{2}]$ 时，$f(x)=x^2-1$

$f(\frac{1+\sqrt5}{2})=\frac{1+5+2\sqrt5}{4}=\frac{1+\sqrt5}{2}$

$x\in[0,1]$ 时.
$f(x)\in[0,1]$.

C. $f(x)$ 的所有“完美区间”的“复区间长度”的和为 $3+\sqrt{5}$

D. $f(x)$ 的所有“完美区间”的“复区间长度”的和为 $3+2\sqrt{5}$

15.已知函数 $y=a^{2x}+2a^x-1(a>0,a\neq 1)$ 在区间 $[-1，1]$ 上的最大值是 7，则 $a=$ ~~4~~ $\frac{1}{2}$ 或 2.

根据 $0<a<1$
$a>1$
利用单调性
分类讨论.

令 $t=a^x$
$y=t^2+2t+1\ (t>0)$

$a>1$ 时
$t\in[\frac{1}{a},a]$ $f(t)$ 单增. $y_{max}=f(a)=a^2+2a-1=7 \Rightarrow a=2$ (舍负).

$0<a<1$ 时，$x\in[-1,1] \Rightarrow t\in[a,\frac{1}{a}]$ $f(t)$ 单增. $y_{max}=f(\frac{1}{a})=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}+1=7 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

22.(12 分)若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对任意 $x_1\in D$，总存在唯一的 $x_2\in D$，使 $f(x_1)g(x_2)=m$ 成立，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在区间 D 上的“m 阶伴随函数”;当 $f(x)=g(x)$ 时，则称 $f(x)$ 为区间 D 上的“m 阶自伴函数”.

(1) 若函数 $f(x)=3^{x-1}$ 为区间 $[a,b](b>a>0)$ 上的“1 阶自伴函数”，求 $\dfrac{ab}{2a^2+b}$ 的最大值; 基本不等式没解出来.

(2) 若 $f(x)=\dfrac{4}{x+4}$ 是 $g(x)=x^2-2ax+a^2$ 在区间 $[0,2]$ 上的“2 阶伴随函数”，求实数 a 的取值范围.

设函数$f(x)=e^x+ax^2+bx+c(a, b, c$为非零实数)，且$f(a)=e^a$，$f(b)=e^b$，若$a<-1$，则$b$的最小值为（ ）

A.1

B.2

C.3

D.4

解答

依题意由$f(a)=e^a$，$f(b)=e^b$得

$+\begin{cases} e^a+a^3+ab+c=e^a \\ e^b+ab^2+b^2+c=e^b \end{cases}$ 两式相减得，

$a(a+b)(a-b)+b(a-b)=0$，

所以$(a-b(a^2+ab+b)=0$，

若$a=b$，则$f(a)=e^a$，$f(b)=e^b$成立时，

$a=b=0$，不成立.

所以$b=-\dfrac{a^2}{a+1}=2-\dfrac{1}{a+1}-(a+1)$

，

因为$a+1<0$，

所以

$b=-\dfrac{a^2}{a+1}=2-\dfrac{1}{a+1}-(a+1)\geqslant 2+2\sqrt{\dfrac{1}{a+1}\cdot(a+1)}=4$

，当且仅当$(a+1)^2=1$，即$a=-2$时b取得最小值.

故选：D.

已知不等式$N<\dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}<M$对任意$x\in R$恒成立，其中$M$，$N$是与$x$无关的实数，则$M-N$的最小值是___.

解答

设f（x）$=\dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$，其中x∈R;

$\therefore f(x)=\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\dfrac{2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}-1$;

$\because \left(\dfrac{2}{3}\right)^x>0$，$\therefore 1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x>1$，

$\therefore 0<\dfrac{2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}<2$，$\therefore -1<\dfrac{2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}-1<1$，

即$-1<f(x)<1$;

令M=1，N=-1，则M-N的最小值是1-（-1）=2．

故答案为：2．

14. 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，$f(x-1)$是奇函数，且当$0<x\leqslant 1$时，$f(x)=\log_{2\,020}\dfrac{1}{x}$，则$f(2\,021)+f\left(-\dfrac{1}{2\,020}\right)=$ __1__.

$f(x-1)$是奇函数

$-f(x-1)=f(-x-1)$

$f(x)$是偶函数，$f(x)=f(-x)$

$f(-x-1)=f(x+1)=-f(x-1)$

$f(x+2)=-f(x)$

$f(x+4)=-f(x+2)=-(-f(x))=f(x)$

$f(x)$ 周期为4.

原式 $=f(1)+f(\frac{1}{2020})=1$

5. 如果方程$\lg^2x+(\lg 2+\lg 3)\lg x+\lg 2\lg 3=0$的两个实数根为$x_1, x_2$，则$x_1x_2$的值为（ C ）

A. $\lg 2\cdot\lg 3$　　B. $\lg 2+\lg 3$

C. $\dfrac{1}{6}$　　D. -6

$\lg x_1+\lg x_2=-(\lg 2+\lg 3)$

$\lg(x_1\cdot x_2)=-\lg 6=\lg\frac{1}{6}$

$x_1\cdot x_2=\frac{1}{6}$

函数增长差异

3. 已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$，设 $a=\log_{13}8$，$b=\log_5 3$，$c=\log_8 5$，则（ B ）

$8=13^a$，$8^5=13^{5a}>13^4$，$\underbrace{a>\frac{4}{5}}$

$5^b=3$，$8^c=5$，$5^5=8^{5c}<8^4$，$c<\frac{4}{5}$

A. $c<a<b$　　B. $b<c<a$

C. $b<a<c$　　D. $a<b<c$

转为指数函数，比较 a,c.

$a>\frac{4}{5}$，$c<\frac{4}{5}$

商比法

$\frac{c}{b}=\log_8 5\cdot\log_3 5=\frac{(\lg 5)^2}{\lg 3\lg 8}>1$

$\boxed{\lg 3\lg 8<\left(\frac{\lg 3+\lg 8}{2}\right)^2}<(\lg 5)^2$　基本不等式

$c>b$

b,c比较 法二：中间值 $\frac{5}{7}$

$3^7<5^5\Rightarrow\lg 3^7<\lg 5^5$

$7\lg 3<5\lg 5$

$\frac{\lg 3}{\lg 5}<\frac{5}{7}$

$b=\log_5 3=\frac{\lg 3}{\lg 5}<\frac{5}{7}<\frac{4}{5}$.

$8^5<5^7\Rightarrow\lg 8^5<\lg 5^7\Rightarrow 5\lg 8<7\lg 5$

$\frac{\lg 5}{\lg 8}>\frac{5}{7}$

$b<c$.

4. 已知 $a>1$，$b>1$，且 $\log_2 a+\log_b 3=\log_2 b+\log_a 2$，则（ B ）

A. $a<\sqrt{b}<b$　　B. $\sqrt{b}<a<b$

C. $b<\sqrt{a}<a$　　D. $\sqrt{a}<b<a$

$\log_2 a-\log_a 2=\log_2 b-\log_b 3$　同构，移项

$\log_b 2<\log_b 3$

$\log_2 a-\log_a 2<\log_2 b-\log_b 2$ → 相似结构比较大小：化为函数通式，利用单调性.

函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$\Rightarrow\log_2 a<\log_2 b\Rightarrow a<b$.

同理：$\log_2 b>\log_3 b$

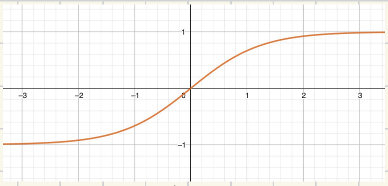
$\log_2 a-\log_a 2>\log_3 b-\log_b 3$

$\Rightarrow\log_2 a>\log_3 b=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{b}>\log_2\sqrt{b}$

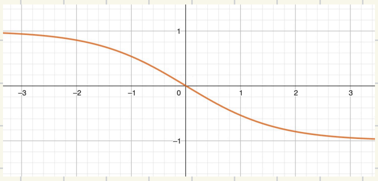
$\Rightarrow\sqrt{b}<a<b$.

常见特殊函数图像

$$f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$$



a > 1



0 < a < 1

若a>0, b>0, 且ab=a+b+3, 则ab的取值范围是( )
A. [9,+∞)B. [3,+∞)C. (0,3)D. (3,9]

深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法，它是以神经网络为出发点的，在神经网络优化中，指数衰减的学习率模型为L=$L_0D^{\frac{G}{G_0}}$,其中L表示每一轮优化时使用的学习率，L_0表示初始学习率，D表示衰减系数，G表示训练迭代轮数，G_0表示衰减速度.已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为0.5,衰减速度为18,且当训练迭代轮数为18时，学习率衰减为0.4,则学习率衰减到0.2以下(不含0.2)所需的训练迭代轮数至少为( )(参考数据:$\lg 2\approx$0.3010)
A. 72B. 74C. 76D. 78

已知a=$1.2^{0.2}$, b=$\log_5$2, c=$\log_7$3, 则a, b, c的大小关系为( )
A. a>c>bB. a>b>cC. b>c>aD. c>a>b

已知函数f(x)=x^2+2x+2(x<0)与g(x)=$x^2+\ln$(x+a)(a$\in$R,a>0)的图象上存在关于y轴对称的点,则a的取值可以是下列数据中的( )
A. $\frac{1}{e^2}$ B. $\frac{1}{e}$ C. eD. 3e

已知a>1,b>1, $\frac{a}{a-1}=2^a$, $\frac{b}{b-1}=\log_2$b,则以下结论正确的是( )
A. a+2^a=b+$\log_2$bB. $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{\log_2 b}$=1C. a-$\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$D. a+b>4

布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理，它得名于荷兰数学家鲁伊兹.布劳威尔，简单地讲就是对于满足一定条件的连续函数f(x),存在一个点x_0,使得f(x_0)=x_0,那么我们称该函数为“不动点”函数,而称x_0为该函数的一个不动点.现新定义:若x_0满足f(x_0)=-x_0,则称x_0为f(x)的次不动点.有下列结论:
① 定义在R上的偶函数既不存在不动点,也不存在次不动点.
② 函数f(x)=e^x+2(x-1)仅有一个不动点.
③ 当1$\leqslant$a$\leqslant\frac{3}{2}$时,函数f(x)=$\log_{\frac{1}{2}}$(4^x-a$\cdot2^x$+1)在[0,1]上仅有一个不动点和一个次不动点.
上述结论正确的是______.

某企业为了增加工作岗位和增加员工收入，投入90万元安装了一套新的生产设备，预计使用该设备后前n($n\in N^*$)年的总支出成本为($10n^2$-5n)万元,每年的销售收入95万元.设使用该设备前n年的总盈利额为f(n)万元.

(1)写出f(n)关于n的函数关系式,并估计该设备从第几年开始盈利;

(2)使用若干年后对该设备处理的方案有两种:

方案一:当总盈利额达到最大值时,该设备以20万元的价格处理;

方案二:当年平均盈利额达到最大值时,该设备以70万元的价格处理;

问哪种方案较为合理？并说明理由.

已知函数f(x)=($\log_2$x-2)($\log_4$x-$\frac{1}{2}$).

(1)当x$\in$[2,4]时,求该函数的值域;

(2)若f(x)>m$\log_2$x对于x$\in$[4,16]恒成立，求m的取值范围.

已知f(x)为偶函数，g(x)为奇函数，且满足f(x)-g(x)=2^{1-x}.

(1)求f(x),g(x);

(2)若方程mf(x)=$[g(x)]^2$+2m+9有解,求实数m的取值范围.

函数y=f(x)的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数y=f(x)为奇函数,可以将其推广为:函数y=f(x)的图象关于点P(a,b)成中心对称图形的充要条件是函数y=f(x+a)-b为奇函数,给定函数f(x)= $\dfrac{x^2+x-6}{x+1}$.

(1)求f(x)的对称中心;

(2)已知函数g(x)同时满足:① g(x+1)-1是奇函数;② 当x∈[0,1]时, g(x)= x^2 -mx+m.若对任意的 $x_1\in[0,2]$,总存在 $x_2\in[1,5]$,使得g(x_1)=f(x_2),求实数m的取值范围.

第12题　(多选题）你的得分2.0/满分5.0，班级正确率32.68%，年级正确率41.98%

【考查方向】求分段函数的定义域、值域、解析式；分段函数的图象；分段函数与不等式；函数零点、方程的根的个数

已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, x\leqslant 0,\\ |log_2x|-1, x>0,\end{cases}$ 则下列选项正确的是（ ） ACD

A. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$ ✓

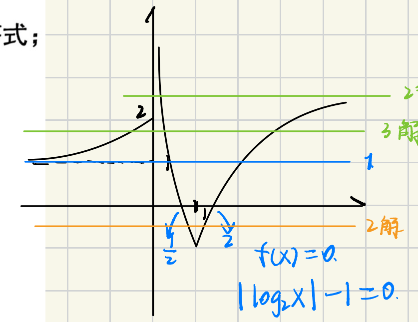
B. 方程 $f(x)=2$ 有~~两~~个不等的实数解 三个

C. 不等式 $f(f(x))>0$ 的解集为 $\left(0,\dfrac{1}{8}\right)\cup(\dfrac{\sqrt{2}}{4},2\sqrt{2})\cup(8,+\infty)$ ✓

D. 关于 x 的方程 $f^2(x)-2f(x)=1-a^2$ 解的个数可能为 2, 4, 5 个 ✓

【你的答案及订正】

A



$f(x)=0$

$|\log_2 x|-1=0$

$\log_2 x=\pm1$

$x=2$ 或 $\frac{1}{2}$.

C: $f(f(x))>0$　　$f(x)>0$

$0<f(x)<\frac{1}{2}$ 或

$f(x)=|\log_2 x|-1<\frac{1}{2}$

$|\log_2 x|<\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}<\log_2 x<\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x\in(\frac{\sqrt{2}}{4},2\sqrt{2})$

$f(x)>2$.

$|\log_2 x|-1>2$

$|\log_2 x|>3$

$\log_2 x>3$ 或 $\log_2 x<-3$.

$x\in(0,\frac{1}{8})\cup(8,+\infty)$

镶套函数从外往内解

D. 令 $t=f(x)$.

$t^2-2t+a^2-1=0$.

$\Delta=4(2-a^2)$

当 $\Delta=0$ 时, $a^2=2$, $a=\pm\sqrt{2}$, $t=1$, x 有两个解

当 $\Delta>0$ 时, $a^2<2$, $t=1\pm\sqrt{2-a^2}$

$0<\sqrt{2-a^2}\leqslant\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $1<1+\sqrt{2-a^2}\leqslant1+\sqrt{2}$

$1-\sqrt{2}<1-\sqrt{2-a^2}\leqslant1$

$f(x)\in(-1,1)$ 时, x 有两解.

$(1,2]$ 时有3解.

$(2,1+\sqrt{2}]$ 有2解

第16题　你的得分0.0/满分5.0，班级正确率7.32%，年级正确率9.03%

【考查方向】利用函数的单调性解决参数问题；函数单调性、奇偶性的综合应用

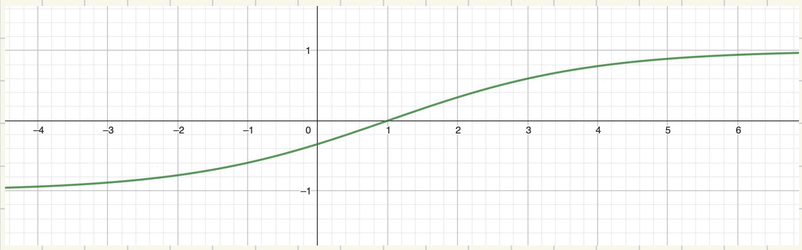
已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2}{2^x+2}$ ，若 $f(a^2-2)+f(a-2)>0$ ，则实数 a 的取值范围为 $\underline{(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)}$.

令 $g(x)=f(x+1)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 为奇函数.

$\therefore g(a^2-3)>-g(a-3)$

$\Rightarrow g(a^2-3)>g(3-a)$

$a^2-3>3-a \Rightarrow a\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$



$f(x)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称

未分析 $\Delta<0$ 的情况

第18题 你的得分8.0/满分12.0，班级正确率53.25%，年级正确率60.61%

【考查方向】解含参的一元二次不等式

已知函数 $f(x)=mx^2+4mx+3$

(1) 若 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant -1\}$ ，求实数 m 的值；

(2) 若 $m>0$ ，求不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集.

第19题 你的得分9.0/满分12.0，班级正确率36.18%，年级正确率43.42%

【考查方向】对数运算的实际应用；利用对数函数模型解决实际问题

塑料袋给我们生活带来了方便，但对环境造成了巨大危害·某品牌塑料袋经自然降解后残留量 y 与时间 t 年之间的关系为 $y=y_0\cdot e^{-\frac{r}{v}t}$ ， y_0 为初始量， r 为光解系数(与光照强度、湿度及氧气浓度有关)， v 为塑料分子聚态结构系数.(参考数据： $\ln 5\approx 1.6,\lg 2\approx 0.3$)

(1) 已知分子聚态结构系数是光解系数的 90 倍，若塑料自然降解，则残留量为初始量的 20% 时，大约需要多少年？

(2) 为了缩短降解时间，该品牌改变了塑料分子聚态结构，其他条件不变·已知 2 年就可降解初始量的 20%. 要使残留量不超过初始量的 5% ，至少需要多少年？

【考查方向】判断或证明函数的奇偶性；函数单调性、奇偶性的综合应用

已知定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)+1=f(x)+f(y)$ ，且当 $x>1$ 时， $f(x)<1$.

(1) 证明：函数 $f(x)$ 是偶函数；

(2) 若 $f(2)=2$ ，解不等式 $2f(x)<f(x^2-1)+3$.

第22题 你的得分0.0/满分12.0，班级正确率7.72%，年级正确率10.54%

【考查方向】已知分段函数求参或自变量；函数的新定义问题；函数零点、方程的根的个数

已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域分别为 D_1 和 D_2 ，若对任意 $x_0\in D_1$ ，恰好存在 n 个不同的实数 $x_1,x_2\cdots,x_n\in D_2$ ，使得 $g(x_i)=f(x_0)$(其中 $i=1,2,\cdots,n,n\in N^*$)，则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的“n 重覆盖函数”.

(1) 判断 $g(x)=x(x\in[0,4])$ 是否为 $f(x)=x+2(x\in[0,1])$ 的“n 重覆盖函数”，如果是，求出 n 的值；如果不是，说明理由.

(2) 若 $g(x)=\begin{cases} ax^2+(2a-3)x+1,-2\leqslant x\leqslant 1 \\ \ln x,x>1 \end{cases}$ 为 $f(x)=log_2\dfrac{e^x+2}{e^x+1}$ 的“2 重覆盖函数”，求实数 a 的取值范围；

(3) 函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[1.2]=1,[2]=2,[-1.2]=-2$. 若 $x\in[0,2)$ 时， $h(x)=ax-[ax]$ 为 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的“5 重覆盖函数”，求正实数 a 的取值范围.

10．已知正数 a、b 满足 $\log_3 a+\log_9 b=1$，则（ ACD ）

A．a^2+b 的最小值为 6 ✓

B．$a-b$ 的最小值为 -8 ✗

C．$\log_3 a\cdot\log_3 b$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$ ✓

D．$\frac{b+1}{ab}$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$ ✓

B: $b=\frac{9}{a^2}$　换元

$a-b=a-\frac{9}{a^2}$

举反例：$a=\frac{1}{2}$ 时，$a-b=\frac{1}{2}-36<-8$.

$\log_9 a^2b=1$

$a^2b=9$

$a^2+b\geq 2\sqrt{a^2b}=6$.

C: $\log_3 a\cdot\log_3 b$

$=\log_3 a\cdot\log_3\frac{9}{a^2}$

$=\log_3 a(2-2\log_3 a)$

$=-2(\log_3 a)^2+2\log_3 a$

令 $\log_3 a=t$

$=-2t^2+2t$　max: $\frac{1}{2}$.

D: $\frac{b+1}{ab}\geq\frac{2\sqrt{b}}{ab}\geq\frac{2}{a\sqrt{b}}=\frac{2}{3}$.

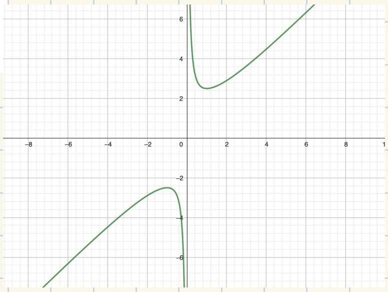
11．已知函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$，则下列结论正确的是（ AC ）

A．$f(x)$ 为奇函数 ✓ $\cdot f(-x)=-f(x)$

B．$f(x)$ 值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ ✗ $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$　$x+\frac{1}{x}\geq 2$，$x=1$ 时取等　$x+\frac{1}{x}=t$　$f(x)=t+\frac{1}{t}$　$f(x)$ 值域 $(-\infty,-\frac{5}{2}]\cup[\frac{5}{2},+\infty)$

C．若 $x_1>0,x_2>0,x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>2$．✓

D．当 $x>0$ 时，恒有 $f(x)\geq\frac{5}{2}x$ 成立



C: $f(\frac{1}{x})=\frac{(\frac{1}{x})^2+1}{\frac{1}{x}}+\frac{\frac{1}{x}}{(\frac{1}{x})^2+1}=\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=f(x)$

$f(x_1)=f(\frac{1}{x_1})=f(x_2)=f(\frac{1}{x_2})$

$x_2=\frac{1}{x_1}$　$x_1\neq 2$.

$x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}>2$

D: ① 反例　$f(2)=\frac{29}{10}<5$

② $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}\geq\frac{3}{2}$　$x>0$ 时恒成立

12．定义在 R 上的函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $f(x)-g(2-x)=4$ ①，$g(x)+f(x+2)=2$ ②，且 $f(x+1)$ 为偶函数，$f(1)=5$，则（ AC ）

$f(x+2)-g(-x)=4$. ③

A．$f(x)=f(2-x)$　$\frac{2-x+x}{2}=1$ ✓

B．$g(x)+g(-x)=0$ ✗

C．$f(x)+f(x+2)=6$ ✓

D．$g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(22)=-22$ ✗ -20

C: $f(x)=f(2-x)$.

代入①

$\Rightarrow f(2-x)-g(2-x)=4$.

$\Rightarrow f(x)-g(x)=4$ ④

$g(x)=2-f(x+2)$ ⑤.

代入④

$f(x)-2+f(x+2)=4$.

D: $f(x)-g(x)=4\Rightarrow f(x+2)-g(x+2)=4$.

$g(x)+f(x+2)=2$

$\begin{cases}g(x)+g(x+2)=-2.\\ g(x+2)+g(x+4)=-2\end{cases}$　$g(x)=g(x+4)$　$T=4$.

$g(1)=1$.　$g(3)=3$　$g(2)=-1$

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3^x+1, x\le 0\\ \left|\log_4 x\right|, x>0\end{cases}$，若关于 x 的函数 $g(x)=f^2(x)-(a+2)f(x)+3$ 恰好有四个零点，则实数 a 的取值范围是____________.

20. 2022 年，奥密克戎 $BA.5.1.3$ 变异毒株再次入侵重庆，为了更清楚了解该变异毒株，某科研机构对该变异毒株在一特定环境下进行观测，每隔单位时间 T 进行一次记录，用 x 表示经过单位时间的个数，用 y 表示此变异毒株的数量，单位为万个，得到如下观测数据：

$x(T)$	1	2	3	4	5	6	…
y(万个)	…	10	…	50	…	250	…

若该变异毒株的数量 y（单位：万个）与经过 $x\left(x\in\mathrm{N}^*\right)$ 个单位时间 T 的关系有两个函数模型 $y=Ax^2+B\left(A\neq 0\right)$ 与 $y=ka^x\left(k>0,a>1\right)$ 可供选择.

（1）判断哪个函数模型更合适，并求出该模型的解析式；$y=2(\sqrt{5})^x$

（2）求至少经过多少个单位时间该病毒的数量不少于十亿个.

（参考数据：$\sqrt{5}\approx 2.236,\sqrt{6}\approx 2.449$，$\lg 2\approx 0.301,\lg 6\approx 0.778$）

(2) $2(\sqrt{5})^x \geqslant 10^5$

$(\sqrt{5})^x \geqslant 50000$

两边同时取对数:

$x\lg\sqrt{5} \geqslant \lg 5+4$

$x \geqslant \dfrac{\lg 5+4}{\lg\sqrt{5}} = 2+\dfrac{4}{\frac{1}{2}\lg 5} = 2+\dfrac{4}{\frac{1}{2}(1-\lg 2)}$

21. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)=3^x-a\cdot 3^{-x}$ 有 $f(0)=2$.

（1）用定义证明：函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）若 $f\left(2^{2x}-2^x+1\right)\geq f\left[(2m-1)\cdot 2^x\right]$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

三角函数

8. (多选题)已知$\tan^2x-2\tan^2y-1=0$,则下列式子成立的有(CD)

A. $\sin^2y=2\sin^2x+1$

B. $\sin^2y=-2\sin^2x-1$

C. $\sin^2y=2\sin^2x-1$

D. $\sin^2y=1-2\cos^2x$

切化弦: $\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-2\frac{\sin^2y}{\cos^2y}-1=0.$

同时乘 $\cos^2x\cos^2y$ → $\sin^2x\cos^2y-2\sin^2y\cos^2x=\cos^2y\cos^2x$

分解因式 $(1-\cos^2x)(1-\sin^2y)-\sin^2y\cdot\cos^2x=(\cos^2y+\sin^2y)\cos^2x$

$1-\cos^2x-\sin^2y+\sin^2y\cos^2x-\sin^2y\cdot\cos^2x=\cos^2x.$

$\Rightarrow \sin^2y=1-\cos^2x=1.$

简洁表式

$\sin^2x=a \quad \sin^2y=c$

$\cos^2x=b \quad \cos^2y=d.$

$a+b=1$, $c+d=1$

$ad-2bc-bd=0.$

$2bc=(1-c)(1-2b)$

$\Rightarrow c=1-2b=2a-1$

3. 设 $\tan(5\pi+\alpha)=m$, 则下列选项为 $\frac{\sin(\alpha+3\pi)+\cos(\pi+\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}$的值的是(A)

A. $\frac{m+1}{m-1}$ B. $\frac{m-1}{m+1}$

C. -1 D. 1

$\tan\alpha=m.$

原式 $=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}$

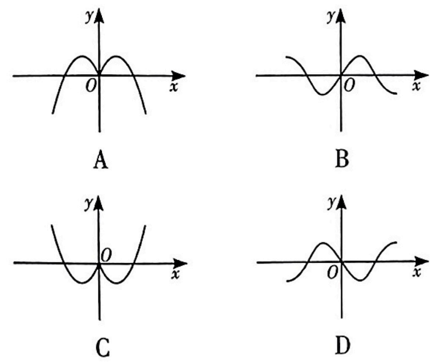
上下同除 $\cos\alpha$

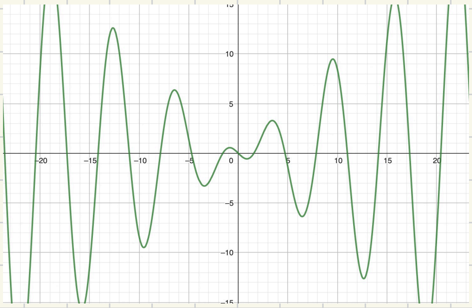
$=\frac{-\tan\alpha-1}{-\tan+1}$

$=\frac{-m-1}{-m+1}$

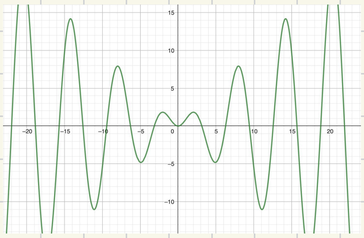
$=\frac{m+1}{m-1}$

11. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是(D)

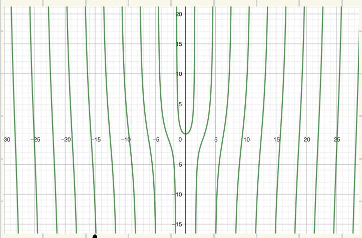




1. 判断奇偶性
2. 取特殊值.



$f(x)=x\cdot\sin x$



$f(x)=x\tan(x)$

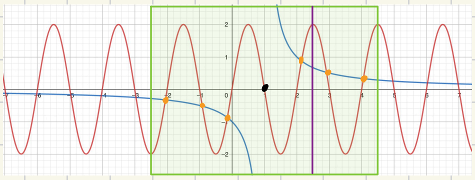
10. 函数 $y=\frac{1}{x-1}$与 $y=2\sin\pi x\left(-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant\frac{9}{2}\right)$的图象的所有交点的横坐标之和为(D)

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

两个函数都关于 $(1,0)$ 中心对称.

6个交点

$3\times2=6.$



$f(x)=\frac{1}{x-1}$ $g(x)=2\sin\pi x$

先分析 $(1,\frac{9}{2})$ 部分.

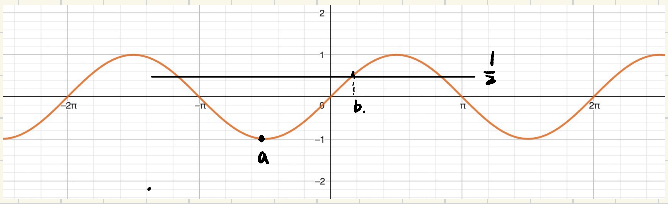
$g(\frac{5}{2})>f(\frac{5}{2})\Rightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(2,3)$ 上有2个交点
在 $(4,\frac{9}{2}]$ 上有1个交点

$g(4)=0<f(4)$

右边共3个交点.

$3+3=6$个.

2. 若函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $[a,b]$，值域为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，则 $b-a$ 的最大值与最小值之和为 $\underline{\ 2\pi\ }$.



$(b-a)_{max}=\frac{4}{3}\pi$

$(b-a)_{min}=\frac{2}{3}\pi$.